

CURSO DE INTRODUCCIÓN AL CONTROL NO LINEAL DE PROCESOS EN UN PREGRADO DE INGENIERÍA QUÍMICA

Fabio Castrillón Hernández, Manuela Isaza Isaza

Universidad Pontificia Bolivariana
Grupo de Investigación en Automática y Diseño A+D
Circular primera # 70-01 bloque 11. Medellín, Colombia.
Tel. (+574) 4159020, fax. (+574) 4118779
e-mail: fcastrillon@upb.edu.co

Palabras Clave: control de procesos, control no lineal, didáctica del control.

Introducción

Desde hace varias décadas, quizás desde 1970, se habla en el mundo del control no lineal de procesos como una alternativa al control lineal clásico, el cual, a pesar de ser una técnica de análisis bastante limitada para el control de procesos químicos reales, ha tenido gran éxito y ha sido ampliamente enseñada en los cursos de pregrado de ingeniería química, debido principalmente a que el control lineal permite una solución analítica y no requiere de complicados medios computacionales para su simulación y solución. Sin embargo, los recientes avances en paquetes de simulación tipo Matlab® o Polymath®, los cuales son usados en casi todas las facultades de ingeniería como herramientas para la solución numérica y la simulación de complicados modelos matemáticos, han permitido pensar en la posibilidad de enseñar estas nuevas técnicas de control en los cursos de pregrado de ingeniería.

En el caso de la ingeniería química, donde los procesos son por lo general altamente no lineales, es indispensable pensar en la importancia de enseñar este tipo de cursos introductorios al control no lineal de procesos, los cuales están más acordes con el desarrollo del control de procesos en la industria actual que los modelos clásicos. Son realmente pocas las universidades en Colombia que hablan del tema, quizás algunas en cursos de postgrados altamente especializados en el control de procesos, pero muy pocas hasta ahora han tocado el tema en el nivel de pregrado. En la facultad de ingeniería química de la Universidad

Pontificia Bolivariana, siguiendo con la idea de avanzar en la enseñanza de técnicas de control modernas, se viene desarrollando desde hace algunos años, un curso introductorio al control no lineal de procesos para los alumnos interesados en seguir esa línea de profundización. No es un curso obligatorio para todos los estudiantes de la facultad, sino más bien un curso especializado para aquellos que quieren desempeñarse en este campo.

Este artículo describe cómo está organizado el curso de Introducción al Control no Lineal de Procesos en la facultad de ingeniería química de la Universidad Pontificia Bolivariana en Medellín, Colombia. El artículo está organizado como sigue: primero se presenta una justificación del curso junto con sus objetivos y su organización, luego se habla sobre la forma de evaluación en la que se describe el estudio de casos a los que serán enfrentados los estudiantes y finalmente se habla sobre el texto guía que se utiliza, el cual fue preparado especialmente en la facultad para el curso y que presenta una nueva alternativa rica en ejemplos y simulaciones utilizando Matlab®, lo cual hace más amena la enseñanza de un curso como éste.

Metodología

Descripción del curso

Las no linealidades inherentes a los procesos químicos y a los dispositivos usados para su control y manipulación hacen que las técnicas basadas en modelos matemáticos lineales tengan una validez restringida. En la actualidad, las herramientas de hardware y software disponibles permiten llevar a la práctica estrategias no lineales de control, las cuales son cada vez más utilizadas por la industria.

La línea de profundización en dinámica y control de procesos en la facultad de ingeniería química de la Universidad Pontificia Bolivariana, ofrece un curso de 3 créditos sobre introducción al control no lineal de procesos. Este curso pretende suministrar al estudiante herramientas de análisis necesarias para el entendimiento de los sistemas de procesos no lineales, lo que le permitirá saber cómo identificar sistemas altamente no lineales, sus características principales y metodologías para evaluar su estabilidad.

Los objetivos principales del curso son:

- Representar los modelos matemáticos de los procesos químicos mediante el uso de variables de estado.
- Comprender las diferencias existentes en el comportamiento de los sistemas dinámicos lineales y no lineales.
- Aprender a determinar y clasificar los puntos críticos de los sistemas dinámicos no lineales, para la posterior discusión de su estabilidad.

- Utilizar la técnica de la función descriptora para analizar el efecto de elementos no lineales discontinuos sobre la estabilidad del sistema de control.

El curso es dirigido a aquellos estudiantes de los últimos semestres que estén interesados en continuar con el tema de dinámica y control de procesos y que deseen profundizar en los modelos de control no lineales. Es dictado en forma magistral principalmente, en 2 sesiones de 2 horas semanales que se combinan con lecturas dirigidas, asesorías y actividades prácticas utilizando un paquete de simulación tipo Simulink®.

En la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se muestran los temas tratados en el curso de Introducción al Control no lineal de Procesos.

Evaluación del curso (estudio de casos)

El curso de introducción al control no lineal de procesos de la facultad de ingeniería química en la Universidad Pontificia Bolivariana se evalúa con 4 pruebas parciales planeadas por el director del curso con duración de 1 hora y media y un valor del 15% cada una; un informe de lectura y su respectiva exposición sobre un artículo de revista que trate sobre los últimos avances en el control no lineal de procesos; una nota de concepto del 10% asignada por el director del curso con base en el interés del estudiante y su participación; y finalmente un 20% corresponde al desarrollo de un proyecto integrador orientado a la aplicación de los conceptos aprendidos durante el curso a un caso de estudio real.

Tabla 1. Contenido del curso Introducción al Control no lineal de Procesos.

CAPÍTULOS	TEMAS
1. Introducción	Razón del control no lineal de procesos. Visión global del comportamiento de los sistemas no lineales.
2, Formulación de los modelos de procesos en el espacio de estados	Forma general. Linealización de los modelos no lineales. Solución de la forma con entrada cero. Solución a la forma general. Relación entre la representación en variables de estado y la representación en funciones de transferencia para los modelos de proceso. Control mediante realimentación de estados y ubicación de polos.
3. Técnicas para el análisis de sistemas no lineales	Análisis en el plano de fases (primer método de Lyapunov). Análisis basado en la función de Lyapunov (segundo método de Lyapunov). Análisis basado en el uso de la función descriptora.

4. Estudio de casos	Tanque de calentamiento agitado. Estabilidad hidrodinámica. Control on-off de un sistema de nivel de líquido.
---------------------	---

El objetivo de los exámenes parciales es evaluar los conceptos adquiridos en clase de una manera concisa y práctica en un tiempo prudente. Los exámenes parciales no son acumulativos, sin embargo, el contenido del curso obliga al estudiante a conocer y dominar todos los conceptos anteriores al tema que se vaya a evaluar. Un ejemplo de un examen parcial se muestra en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia..**

Por otra parte, el proyecto integrador que se presenta al final del curso por los estudiantes, pretende que estos pongan en práctica los conocimientos adquiridos para enfrentarse a un problema real de ingeniería de control. Este proyecto debe presentarse en forma de artículo de revista científica, para así entrenar a los estudiantes en la elaboración de un texto como estos. Un ejemplo de una parte del proyecto integrador realizado por un grupo de estudiantes se presenta en la Figura 2.

Figura 1. Ejemplo de un examen parcial.

**EXAMEN PARCIAL
INTRODUCCIÓN AL CONTROL NO LINEAL DE PROCESOS
UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA**

1. (Valor 2.0) Demostrar que un péndulo amortiguado cuyo modelo matemático viene dado por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + mg(\text{sen}x) = 0$$

Donde m, l, c y g son constantes >0 ; no presenta ciclos límite.

2. (Valor 3.0) Considere el sistema dinámico descrito por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2y(z-1) \\ \dot{y} &= -x(z-1) \\ \dot{z} &= -z^3 \end{aligned}$$

a) Demuestre que el origen es un punto de equilibrio
b) Usando el primer método de Lyapunov, clasificar y estudiar la estabilidad del origen
c) Tomando como función de Lyapunov:

$$V(x, y, z) = V(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 \quad \text{con } a, b, c > 0$$

Demstrar que $(0,0,0)$ es asintóticamente estable

d) ¿Será $(0,0,0)$ globalmente asintóticamente estable?

Nota: Duración 1 hora y 30 minutos. No pueden sacar apuntes.

Texto guía

Como parte primordial del curso de introducción al control no lineal de procesos, se desarrolló, como trabajo de grado de una alumna de la facultad, un texto guía especial para la materia, el cual no sólo cuenta con los temas discutidos en el curso, sino que hace énfasis en ejemplos y simulaciones,

basándose en la importancia de mostrar una herramienta didáctica que complemente el aprendizaje y sea una fuente de consulta para estudiantes y académicos interesados en el tema.

El texto guía fue una recopilación de información de diferentes libros y fuentes bibliográficas consultadas que reúne de una manera concisa y amable los

contenidos del curso y que complementa cada información con ejemplos y simulaciones diversas que permiten al estudiante comprender y digerir mejor cada tema.

El texto guía está compuesto por tres capítulos, correspondientes al contenido del curso (Tabla 1). Cada capítulo comienza con una introducción y una lista de objetivos que ubica al estudiante en los

temas que se van a tratar y lo que este debe lograr al finalizarlo. Luego, se desarrolla cada tema junto con los ejemplos y simulaciones respectivas y explicaciones pertinentes a la izquierda, lo que permite que el lector siga de una manera amable el texto y recuerde o aclare conceptos que puedan ser confusos. Un ejemplo de la estructura del texto guía se muestra en la Figura 3.

Figura 2. Ejemplo de un proyecto integrador.

<p style="text-align: center;">ANÁLISIS EN ESTADO TRANSITORIO PARA UN PROCESO QUÍMICO MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES</p> <p style="text-align: center;">Luis Forero, Pablo García, Paula Mora, Gilmar Sáenz, José Pablo Toro</p> <p>Resumen En el presente documento se analiza, un modelo transitorio no lineal, relativamente sencillo; modelo para un reactor por lotes isotérmico. Establecido este, en variables físicas, se lleva a una forma vectorial en variables de estado, para luego encontrar los puntos de equilibrio del sistema, a los cuales se les clasifica y realiza un estudio desde el punto de vista de la estabilidad mediante la determinación de valores propios. Se estudia la presencia de ciclos límite y finalmente se plantea la búsqueda de una forma cuadrática, para tratar de encontrar una función que permita hablar de la estabilidad de los puntos de equilibrio a partir del segundo teorema de Lyapunov.</p> <p>Transitory state analysis of a chemical process modeled with non-linear differential equations</p> <p>Abstract In the present document, a relatively simple, transitory, non-linear model of an isothermal batch reactor is analyzed. Once it is established, it's taken to a vector form in state variables to find the equilibrium points of the system which are classified and studied from a stability point of view through the determination of their eigenvalues. The presence of limiting cycles is studied and finally a quadratic form is proposed to find a function in order to analyze the stability of the equilibrium points using Lyapunov's Second Theorem.</p> <p>Keywords: Equilibrium points, limiting cycles, stability, Lyapunov's Theorem.</p>	<p>.1. INTRODUCCIÓN</p> <p>Las operaciones y diferentes procesos de la Ingeniería Química se caracterizan por modelos matemáticos altamente complejos. Pues en el caso general, son modelos rigurosos, en derivadas parciales y altamente no lineales. A pesar de esto, existe un tipo de modelo, conocido como el modelo de parámetros concentrados, donde se pasa de derivadas parciales a ecuaciones diferenciales ordinarias dependientes del tiempo, que en principio resultan más sencillas de estudiar que los modelos rigurosos. Sin embargo, el hecho de pasar de ecuaciones en derivadas parciales a ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO^s), no facilita de todo el problema, pues queda presente el problema de la no linealidad, además de la interacción que puede existir entre las diferentes variables del modelo entre otros aspectos.</p> <p>Uno de los aspectos más importantes, a la hora de analizar estos procesos es la estabilidad, la cual se estudia a partir de los puntos de equilibrio de los modelos matemáticos. Lo común en la ingeniería, es tomar dichos modelos de parámetros concentrados y realizar aproximaciones de los términos no lineales mediante aproximaciones en series de Taylor, para llevar al modelo a un modelo lineal, fácilmente solucionable, con la teoría de ecuaciones diferenciales. Sin embargo las conclusiones que se pueden obtener aquí son locales, pues las aproximaciones hechas para obtener EDO^s, deben hacerse alrededor de un punto y son solo válidas a zonas cercanas a este, además que pueden existir no linealidades duras, a las cuales no se les pueden aplicar las aproximaciones.</p> <p>Para resolver este problema, se puede realizar un análisis a partir de una construcción del modelo en el espacio de estados, en el cual se trabaja el modelo tal cual como es y se realiza un análisis de estabilidad a partir más riguroso, que permite hacer conclusiones generales del comportamiento del proceso. Con este documento se busca mostrar la utilidad del estudio de sistemas, mediante la utilización del modelo en variables de estado, a través del cual se realiza un análisis de la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema, mediante la clasificación de estos de acuerdo a los valores propios y mediante la utilización del segundo teorema de Lyapunov. El modelo elegido, se trabajó para un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de primer orden.</p>
---	---

Por otra parte, el texto también cuenta con una numeración que permite al lector seguir secuencialmente las ecuaciones, los ejemplos, las simulaciones, las figuras y las tablas. Además, al finalizar cada capítulo se hace un resumen de los conceptos más importantes que se trataron, de forma que el estudiante pueda consultar un repaso

conciso de los temas.

Las herramientas de hardware y software disponibles hoy en día, hacen de un curso como estos uno en el que los estudiantes pueden comprender y analizar los fenómenos reales, sin necesidad de hacer aproximaciones que eliminen las no-linealidades y enmascaren el proceso. El

texto guía elaborado para este curso, se aprovecha fuertemente de los programas de simulación disponibles y muestra los fenómenos reales, permitiendo al estudiante que experimente y comprenda de una manera práctica la influencia de las no linealidades en los procesos químicos y su dificultad para controlarlos.

Un ejemplo de esto se muestra claramente en el primer capítulo en el que se enseñan las

características de los procesos no lineales. Allí se utiliza ampliamente Simulink® para desarrollar los lazos de control y los modelos de los procesos a estudiar de forma que al simularlos se puedan visualizar fácilmente las no lineales de estos. Un ejemplo de esto se muestra en la Figura 4 sacado del Capítulo 1, en el que se muestra, utilizando Simulink®, el comportamiento de la ecuación de Van der Pool, ecuación que caracteriza el fenómeno de ciclos límites en los sistemas no lineales.

Figura 3. Estructura del texto guía.

<p style="text-align: right;">CAPÍTULO 1</p> <p style="text-align: center;">INTRODUCCIÓN AL CONTROL NO LINEAL DE PROCESOS</p> <p>En este capítulo se presentarán las principales características del control no lineal de procesos, al igual que se revisarán algunos conceptos básicos del Control Automático de Procesos.</p> <p>Se espera que al finalizar el capítulo, el estudiante tenga claro en qué se diferencia un sistema lineal y un sistema no-lineal, además de los fenómenos que se pueden presentar en este último. Por otra parte, se espera que queden claros los beneficios y la importancia del desarrollo del control no lineal para la industria química.</p> <p>Para este capítulo se recomienda que el estudiante acompañe su aprendizaje con un software de simulación como el Simulink® que le permita observar los fenómenos que ocurren en los sistemas no lineales.</p> <p>OBJETIVOS</p> <ul style="list-style-type: none"> • Definir el Control No Lineal de procesos • Proporcionar al estudiante las razones y funciones del Control No Lineal. • Analizar globalmente el comportamiento de los sistemas no lineales 	<p>1.1. Definición del control no lineal</p> <p>El control no lineal se refiere al análisis y diseño de sistemas de control no lineales, sistemas que tienen al menos un elemento no lineal en su estructura. Se entiende por análisis al proceso por el cual se estudian las características de un sistema de control de malla cerrada ya existente con el objetivo de mejorarlo o modificarlo, y por diseño, a la síntesis de un sistema de control que se ajuste a las características específicas de una planta con procesos no lineales.</p> <p>Las no linealidades de un sistema pueden ser proporcionadas por: elementos de Hardware como sensores y elementos finales de control, las características del proceso o por el tipo de controlador (controlador On-Off, PI, de error cuadrático, etc.)</p> <p>1.2. Razón del Control No Lineal de Procesos</p> <p>A pesar de que las técnicas lineales de control presentan herramientas poderosas y han sido ampliamente desarrolladas y probadas en el plano industrial, su rendimiento en el control de algunos procesos es limitado.</p> <p>La principal razón de esta afirmación se basa en la naturaleza misma de los procesos químicos, los cuales presentan entre otras, las siguientes características:</p>
--	--

Otro ejemplo de la amplia utilización de paquetes de simulación en el texto guía se muestra en el Capítulo 3 en el que se explican las técnicas de análisis de los sistemas no lineales o métodos de Lyapunov. En este capítulo es clave el análisis de los modelos sobre el plano de fases, para los cuales se requiere de una herramienta que permita graficarlos y manipularlos. En este capítulo se utilizó una M-File desarrollado por el Instituto de Lund de Tecnología en Suecia para sus estudiantes de Control no lineal que permite construir el plano de fases de sistemas altamente no lineales. Un ejemplo del Capítulo 3, utilizando esta M-File se muestra en la Figura 5.

Finalmente, y como novedad en este tipo de textos

guías, este se presenta junto con un manual de solución de ejercicios en el que están las soluciones a todos los ejercicios propuestos del texto, con el fin de que los estudiantes puedan comparar las soluciones a sus ejercicios y puedan responderse ellos mismos las dudas que tengan.

Conclusiones

- El control no lineal de procesos existe desde hace varias décadas, sin embargo su enseñanza se ha visto limitada debido principalmente a la falta de métodos para solucionarlo. En los últimos años, el enorme avance en los paquetes de simulación ha permitido pensar en la

posibilidad de enseñar este tipo de técnicas de control modernas que no solo permiten estudiar

el proceso como tal sino que hacen al control mucho más eficiente.

Figura 4. Ejemplo del Capítulo 1.

SIMULACION 1-2

El ingeniero electrónico holandés Van der Pool, en 1920 descubrió el fenómeno de ciclos límite en el estudio de la dinámica de un oscilador y lo representó por medio de la ecuación que lleva su nombre (S 1-2.1)

$$m\ddot{X} + 2C(X^2 - 1)\dot{X} + KX = 0 \tag{S 1-2.1}$$

Donde m, C y K son constantes >0

Encuentre la respuesta del oscilador de Van der Pool mediante la simulación de este sistema utilizando Simulink® y analice los resultados.

Solución:

Simulink® trae en sus ejemplos de simulación el comportamiento de la ecuación de Van der Pool. Esta se puede encontrar en Open/Toolbox/simulink/simdemos/vdp.

Es importante que analice la simulación y verifique el comportamiento de esta ecuación. Los bloques de la simulación se muestran en la Figura S 1-2.1

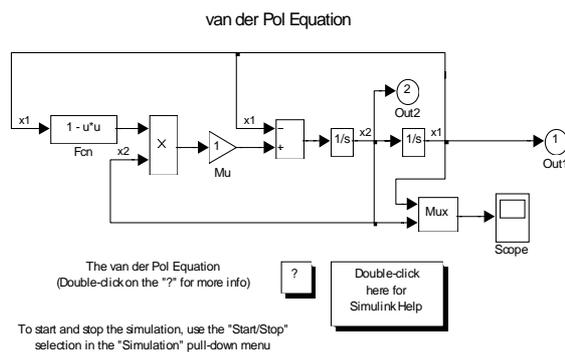


Figura S 1-2.1 Simulación para la ecuación de Van der Pol

En la Figura S 1-2.2. se muestra el comportamiento de la ecuación de Van der Pool para dos condiciones iniciales diferentes. Note que el sistema oscila independientemente de cual sea el valor de x_0 . Es decir, el sistema presenta ciclos límite, este oscila sin ser perturbado por una excitación externa.

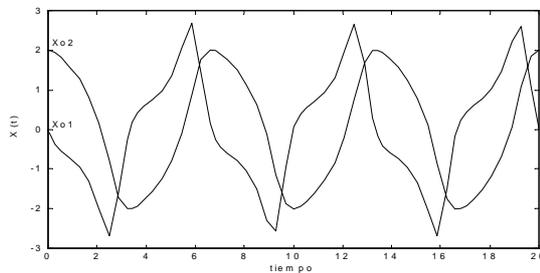


Figura S 1-2.2 Respuesta de la ecuación de Van der Pool

Figura 5. Ejemplo del Capítulo 3.

SIMULACIÓN 3-3

Simule el sistema dado por la ecuación (S 3-3.1) utilizando Matlab®. Identifique los puntos de equilibrio sobre el plano de fases y clasifíquelos. ¿Hay presencia de ciclos límite?.

$$\ddot{x} + \dot{x} - 0.25x^2 = 0 \quad (\text{S 3-3.1})$$

Solución:

Se debe representar la ecuación (S 3-3.1) como un sistema de ecuaciones diferenciales, haciendo:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x} \end{aligned}$$

Con esto, la ecuación (S 3-3.1) queda representada por (S 3-3.2)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 0.25x_1^2 - x_2 \end{aligned} \quad (\text{S 3-3.2})$$

La representación de este sistema en el plano de fases se muestra en la Figura S 3-3.1

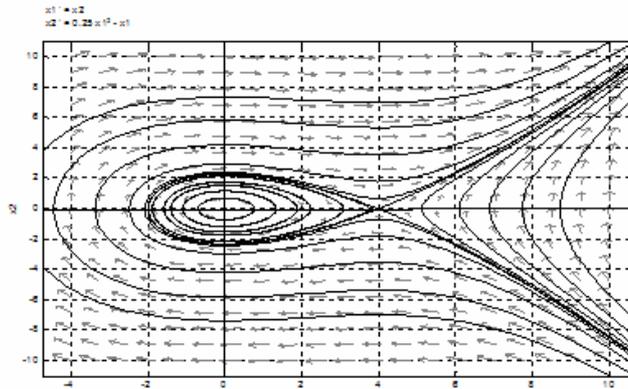


Figura S 3-3.1 Representación en el plano de fases del sistema.

En la Figura S 3-3.1 es claro el comportamiento del sistema. En este existen dos puntos críticos: $(0,0)$ y $(4,0)$. El primero de ellos se comporta como un centro, mientras que el segundo se comporta como un punto silla. Note además, que no existen ciclos límite.

- El curso de Introducción al Control No Lineal de Procesos es un curso diseñado para estudiantes de ingeniería química que quieran profundizar en el área de control automático de procesos. Este es un curso pionero del control no lineal para ingenieros químicos que introduce al estudiante en el análisis de los procesos no lineales y en las diferentes metodologías que existen para su tratamiento.
- Para este curso se desarrolló un texto guía que reúne los temas y los acompaña de numerosos ejemplos y simulaciones que permiten al estudiante apreciar y comprender mejor los fenómenos que presentan los procesos no lineales.

Agradecimientos

Los autores del presente trabajo agradecen al Ingeniero Juan Miguel Vásquez por sus oportunas sugerencias acerca del manuscrito original y al seminario permanente de educación superior de la UPB por los lineamientos sugeridos para el diseño del curso.

Bibliografía

1. ARCHER, Jean. Álgebra Lineal y Programación Lineal. España: Montaner y Simon, S.A., 1967. 271p.
2. BEQUETTE, B. Wayne. Process Dynamics: Modeling, Analysis and Simulation. New Jersey: Prentice Hall, 1998. 621p.

3. BORRELLI, Robert y COLEMAN, Courtney S. Ecuaciones Diferenciales: Una Perspectiva de Modelación. México: Oxford University Press, 2002. 828p.

4. CORRIPIO, Armando B. y SMITH, Carlos A. Principles and Practice of Automatic Process Control. 2. ed. U.S.A: John Wiley and Sons, Inc, 1997. 768p.

5. COUGHANOWR, Donald R. Process Systems Analysis and Control. 2 ed. Singapur: McGraw Hill, 1991. 566p

6. FOGLER, H. Scott. Elements of Chemical Reaction Engineering. 3 ed. New Jersey: Prentice Hall, 1999. 967p.

7. KHALIL, Hassan K. Nonlinear Systems. Segunda Edición. New Jersey: Prentice Hall, 1996. 734p.

8. LEITHOLD, Louis. El Cálculo con Geometría Analítica. 6. Ed. México: Harla, 1992. 1563p.

9. LEWIS, Paul H. y YANG, Chang. Sistemas de Control en Ingeniería. Madrid: Prentice Hall, 1999. 464p.

10. LUYBEN, William L. Process Modeling, Simulation and Control for Chemical Engineers. 2 ed. Singapur: McGraw Hill, 1990. 723p.

11. Nonlinear Control. Department of Automatic Control: base de datos bibliográfica. [en línea]. Lund: Lund Institute of Technology. 2004. <<http://www.control.lth.se/~kursolin>>. [consulta: 20 Marzo 2004].

12. Nonlinear Control Systems Analysis. Systems Control Group: base de datos bibliográfica. [en línea]. Toronto: University of Toronto. 2003. <<http://www.control.toronto.edu/~maggiore/Contents/Courses/ECE1647/ECE1647.html>>. [consulta: 20 Marzo 2004]
13. OGATA, Katsuhiko. Ingeniería de Control Moderna. México: Prentice Hall, 1998. 997 p.
14. SHINSKEY, F. G. Sistemas de Control de Procesos: Aplicación, Diseño y Sintonización. México: McGraw Hill, 1996. 265p.
15. SLOTINE, Jean Jaques E. Applied Non Linear Control. New Jersey: Prentice Hall, 1991. 459p.
16. THE MATH WORKS INC. La edición del Estudiante de Simulink. Madrid: Prentice Hall, 1998. 225p.
17. UMEZ-ERONINI, Eronini. Dinámica de Sistemas y Control. México: Internacional Thomson Editores, 2001. 993p.
18. ZILL, Dennis G. Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado. 6 ed. México: International Thomson Editores, 1997. 520p.
19. ZILL, Dennis G. y CULLEN, Michael R. Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valor en la Frontera. 5 ed. México: Thomson Learning, 2002. 631p.